

Monte Carlo–Simulation und Varianzreduktion in Theorie und Praxis

Abstract: Es wird die Monte Carlo Simulation beschrieben und an zwei Beispielen veranschaulicht. Daran anschließend werden Varianzreduktionsmethoden diskutiert (Kontrollfunktion, Stratified Sampling, Importance Sampling) und an Beispielen verdeutlicht. In der Folge wird dann der VaR eines “einfachen” Portfolios mit der MC-Simulation berechnet. Schließlich wird die Güte der MC-Simulation kurz angesprochen. Das Spreadsheet mit den Zahlenbeispielen kann von www.actuarial-files.com/de/var.d.asp heruntergeladen werden.

Während bei der VaR-Bestimmung mittels der Varianz-Kovarianz-Methode vorausgesetzt werden muß, daß sich der Wert eines Portfolios bei Veränderung seiner Risikofaktoren nur linear oder quadratisch ändern darf, ist diese Annahme bei der Bestimmung von VaR mittels der Monte Carlo-Simulation nicht notwendig.

“In contrast, Monte Carlo simulation is applicable with virtually any model of changes in risk factors and any mechanism for determining a portfolio’s value in each market scenario.”¹

Als ein Nachteil der MC-Simulation muss aber angesehen werden, das der Approximationsfehler der Simulation nur langsam sinkt. Haben wir es mit einer Stichprobenlänge von m zu tun, geht der Approximationsfehler nur um das \sqrt{m} -fache zurück. Darum sollte mit der Implementierung einer MC-Simulation eine Strategie der Varianzreduktion Hand in Hand gehen.

Diese Abhandlung enthält zahlreiche Zahlenbeispiele, um so dem Formalismus “Leben einzuhauchen” und dem Leser die Möglichkeit zu geben, die Definitionen auch praktisch nachzuvollziehen.

Der Rest dieses Artikels ist folgendermaßen aufgebaut: In Abschnitt 1 wird die MC-Simulation definiert. Dann werden wir im folgenden Abschnitt den gefundenen (rohen) Schätzer durch verschiedene alternative Schätzer ersetzt. Diese neuen Schätzer weisen eine kleinere Varianz als der rohe Schätzer auf. Die Abschnitte 1 und 2 schließen jeweils mit numerischen Beispielen ab. In Abschnitt 3 wenden wir die MC-Simulation auf ein Portfolio-Problem an, während wir in Abschnitt 4 eine Einordnung der MC-Simulation hinsichtlich seiner Güte vornehmen.

¹ Glasserman, Heidelberger, and Shahabuddin (2000)

1. Die Monte Carlo-Simulation

Anderson definiert die MC-Simulation folgendermaßen:

“Monte Carlo is the art of approximating an expectation by the sample mean of a function of simulated random variables.”²

Die Monte Carlo-Methode ist also eine Applikation des statistischen Schliessens. Insofern bringt ihre Anwendung auch einen Standardfehler mit sich, den es dann im weiteren Verlauf der Simulation zu reduzieren gilt.

Die MC-Simulation geht folgendermaßen vor sich:

1. Wir haben das Integral $\int f(\mathbf{U}) d\mathbf{U}$ zu lösen. Wir setzen $\int f(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \psi$. Falls das Intervall, über das integriert wird, ungleich dem Einheitsintervall $[0, 1]$ ist, sind die Intervallgrenzen in 0 und 1 umzurechnen. Es muss also ein sog. “Change of Variables” durchgeführt werden.³
2. Wir realisieren die Stichprobe $\mathbf{U} = \{U^{[1]}, U^{[2]}, \dots, U^{[m]}\}$, $\mathbf{U} \sim U_n((0,1)^n)$ und erhalten somit $\mathbf{u} = \{u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[m]}\}$. (2.1)
3. Auf diese Realisierung \mathbf{u} wenden wir nun unsere Funktion f an und erhalten so $f(\mathbf{u})$.
4. Wir berechnen den Mittelwert zu $E[f(\mathbf{U})] = \int f(\mathbf{U}) \Phi(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \int f(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \psi$.

f hat also den Mittelwert ψ und die (noch unbekannte) Standardabweichung σ . Nun setzen wir $H = f(\mathbf{U})$ und erhalten $H_m = m^{-1} \sum f(\mathbf{U})$ als einen unverfälschten Schätzer für ψ .

Die Realisierung $\mathbf{u} = \{u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[m]}\}$ führt uns also zum Schätzer $h_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(u^{[k]})$ für das

gesuchte Integral. Es gilt nämlich ($E[.]$ ist linear)

$$E[H_m] = E\left[\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(U^{[k]})\right] = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m E[f(\mathbf{U})] = \frac{1}{m} * m * E[f(\mathbf{U})] = E[f(\mathbf{U})]$$

Der Schätzer h_m wird der **rohe Monte-Carlo-Schätzer** genannt.

² Anderson (1999)

³ Siehe hierzu z.B. Holton, 2003

Beispiel 1.1

Das Integral $\int_0^1 x^3 dx$ ist mittels der Monte Carlo-Methode zu bestimmen!

Lösung:

- Wir wählen zuerst eine Stichprobenlänge von $m=1000$ und realisieren eine Stichprobe $\{X^{[1]}, X^{[2]}, \dots, X^{[m]}\}$ (im anliegenden [Spreadsheet](#)).
- Sodann wenden wir auf jedes $x^{[k]}$ ($k = 1 \dots m$) die Funktion $x \rightarrow f(x) = x^3$ an.
- Letztendlich bilden wir das arithmetische Mittel der Funktionswerte $f(x^{[k]})$ ($k = 1 \dots m$).

Die analytische Lösung des Integrals $\int_0^1 x^3 dx$ ist:

$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$ und der rohe Monte Carlo-Schätzer bewegt sich um diesen Punkt (mit einer Abweichung von ϵ).

Beispiel 1.2

Wir wollen das Mehrfachintegral $\int_1^4 \int_1^2 \int_0^1 \frac{x^3 * y}{z^2} dx dy dz$ mittels der Monte Carlo-Simulation bestimmen!

Lösung:

- Zunächst führen wir ein sog. “Change of Variable” durch. So erreichen wir, das das Integral über $(0,1)^3$ läuft und wir unsere obige Theorie verfolgen können. Wir haben also drei Funktionen so zu wählen, das wir beim Einsetzen von 0 sich der jeweils untere Integrand, beim Einsatz von 1 sich aber der obere Integrand ergibt. So erhalten wir $(x, y, z)^T = (u_1, u_2 + 1, 3 u_3 + 1)^T$.

- Somit erhalten wir das Integral $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u_1^3 (u_2 + 1)}{(3u_3 + 1)^2} * 3 \, du_1 du_2 du_3$, da sich die Determinante

der Jacobi-Matrix, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, zu 3 ergibt.

- Wir wählen wieder eine Stichprobenlänge von $m=1000$ und realisieren drei Stichproben $\{U_1^{[1]}, U_1^{[2]}, \dots, U_1^{[m]}\}$, $\{U_2^{[1]}, U_2^{[2]}, \dots, U_2^{[m]}\}$ und $\{U_3^{[1]}, U_3^{[2]}, \dots, U_3^{[m]}\}$ (siehe anliegendes [Spreadsheet](#)).
- Auf jedes Tripel $\mathbf{u} = (u_1^{[k]}, u_2^{[k]}, u_3^{[k]})$ ($k = 1 \dots m$) wenden wir die Funktion $\mathbf{u}^{[k]} \rightarrow f(\mathbf{u}^{[k]}) = 3 * \frac{(u_1^{[k]})^3 * (u_2^{[k]} + 1)}{(3u_3^{[k]} + 1)^2}$ an ($k = 1 \dots m$).
- Nun bilden wir das arithmetische Mittel der Funktionswerte $f(\mathbf{u}^{[k]})$ ($k = 1 \dots m$)

Die analytische Lösung des Integrals $\int_1^4 \int_1^2 \int_0^1 \frac{x^3 * y}{z^2} \, dx dy dz$ ist: $\int_1^4 \int_1^2 \int_0^1 \frac{x^3 * y}{z^2} \, dx dy dz = 9 / 32 =$

0.28125. Der rohe Monte Carlo-Schätzer bewegt sich um diesen Punkt.

2. Varianzreduktion

Soweit scheint die MC-Simulation ja durchaus einfach zu sein und man kommt leicht zum rohen MC-Schätzer. Für verschiedene Problemstellungen gibt es aber “bessere” und “schlechtere” MC-Schätzer. Dabei hat der “bessere” MC-Schätzer die geringere Varianz. Demzufolge wollen wir uns nun dem Problem der Reduzierung der Varianz eines rohen MC-Schätzers zuwenden. Es gibt nun zahlreiche Methoden der Varianzreduktion. Wir betrachten hier lediglich drei Methoden etwas genauer.

Wir betrachten hier zuerst die Methode der Kontrollfunktion, die aufgrund ihrer einfachen Implementierung, der Einfachheit im Auffinden von entsprechenden Funktionen und ihrer intuitiven Vorgehensweise vielfach angewandt wird⁴.

⁴ Szechtman (2003)

2.1 Kontrollfunktion

Die Idee ist, das man vom rohen Monte Carlo-Schätzer eine einfach zu behandelnde Funktion ξ abzieht und dann deren Erwartungswert wieder hinzuaddiert. So wird der “Fehlerterm” $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \xi(U^{[k]}) - \mu_\xi$ benutzt, um f zu kontrollieren.

Wir definieren also ein $\xi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ mit bekanntem $\mu_\xi = E[\xi(\mathbf{U})]$

Wir definieren weiter: $f^\circ(\mathbf{U}) = f(\mathbf{U}) - c[\xi(\mathbf{U}) - \mu_\xi]$

f° haben wir also so definiert, daß, bei positivem c , der rohe MC - Schätzer nach oben korrigiert wird, wenn $\xi(\mathbf{U}) - \mu < 0$, wenn dagegen $\xi(\mathbf{U}) - \mu > 0$, wird der Schätzer nach unten korrigiert.

Dieser Schätzer f° ist unverfälscht, da $E[f^\circ(\mathbf{U})] = \Psi$.

Das erlaubt uns nun, folgenden Schätzer für Ψ zu definieren :

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f^\circ(\mathbf{U}^{[k]}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(f(\mathbf{U}^{[k]}) - c \left[\xi(\mathbf{U}^{[k]}) - \mu_\xi \right] \right) \quad (2.1.1)$$

Der Standardfehler σ° ist nun umso kleiner, je näher $cor(\xi(\mathbf{U}), f(\mathbf{U})) = \rho$ bei 1 liegt,

also je stärker ξ und f korreliert sind. Es gilt: $\sigma^\circ = \sqrt{1 - \rho^2}$.

Die Kontrolltechnik kann die Schätzung um mehr als das 17fache verbessern⁵. Die richtige Kontrollfunktion zu finden, kann also viel helfen.

⁵ Diethelm, Vorlesung: Numerische Methoden der Finanzmathematik

Beispiel 2.1 (im [Spreadsheet](#) ein Zahlenbeispiel)

Man betrachte die Funktion $u \rightarrow f(u) = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$. Sei $\Psi := \int f(u) du$.

ψ hat den MC-Schätzer:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(U^{[k]}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{U^{[k]}+1}}$$

Wir definieren $\zeta : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, u \rightarrow f(u) = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2$ (Taylor-Entwicklung 2. Grades von f)

Es gilt $\mu_{\zeta} = E[\zeta(U)] = \frac{7}{8}$. Durch setzen von $c = 1$ erhalten wir:

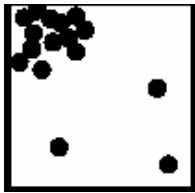
$$\begin{aligned} f^{\circ}(U) &= f(U) - \zeta(U) + \mu_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{U+1}} - \left(1 - \frac{1}{2}U + \frac{3}{8}U^2\right) + \frac{7}{8} \\ &= \frac{1}{\sqrt{U+1}} + \frac{1}{2}U - \frac{3}{8}U^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

So kommen wir zu unserem MC-Schätzer bei Inklusion der Kontrollfunktion ζ :

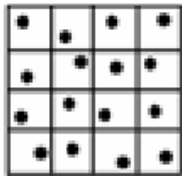
$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f^{\circ}(U^{[k]}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{U^{[k]}+1}} + \frac{1}{2}U^{[k]} - \frac{3}{8}U^{[k]^2} - \frac{1}{8}.$$

2.2 Stratified Sampling

Mit unkonditionierter Stichprobenziehung rechteckverteilter ZVen können wir Pech haben, dass die realisierten Werte U alle in einer Ecke liegen. Zum Beispiel könnte folgendes passieren:



Deswegen unterteilen wir die Region in ω disjunkte Subregionen $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_\omega$. Wir definieren nun ω ZVen mit $X_j \sim X \sim U_n(\Omega_j)$ {eine jede ZV ist also gleichverteilt in “seiner” Subregion} mit den Wkten $p_j = \Pr(X \in \Omega_j) = I/\omega$ ($j = 1 \dots \omega$).



Die ZVen werden nun quasi “gezwungen” sich gleichmässig auf die Subregionen $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_\omega$ zu verteilen.

Für unser Ausgangsproblem haben wir nun

$$\Psi = E[f(U)] = p_1 * E[f(X_1)] + p_2 * E[f(X_2)] + \dots + p_\omega * E[f(X_\omega)]$$

Mit der Stratified Sampling-Methode wenden wir nun den rohen MC-Schätzer für jede Erwartung $E[f(X_j)]$ an und nutzen dabei die Wkten p_j als Gewichte. Also haben wir:

$$\sum_{l=1}^{\omega} p_l \frac{1}{m_l} \sum_{k=1}^{m_l} f(X_l^{[k]})$$

als unverfälschten MC-Schätzer bei Anwendung der Stratified Sampling-Methode

Die m_j 's sind dabei die jeweiligen Stichprobenlängen auf den Subregionen Ω_j . Diese m_j 's können wir mit

der Formel $m_j = m \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^{\omega} p_i \sigma_i}$ bestimmen, wobei $m = \sum_{i=1}^{\omega} m_i$ vorgegeben sein muss.

Die Standardabweichungen σ_j werden dabei durch eine vorgeschaltete MC-Simulation errechnet.

Beispiel 2.2 (im [Spreadsheet](#) ein Zahlenbeispiel)⁶

Zu lösen sei das folgende Integral

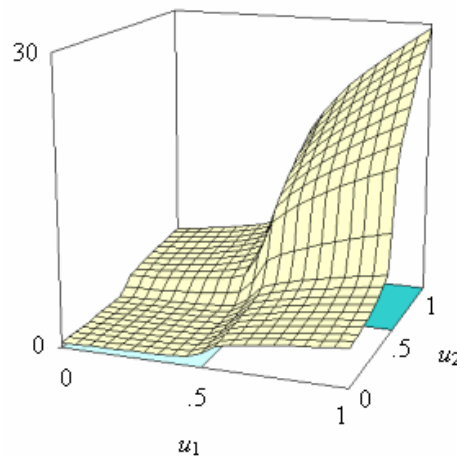
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \exp(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) dx_1 dx_2$$

- Als erstes führen wir ein “Change of Variables” durch.

Mit $(x_1, x_2)^T = (g_1(\mathbf{u}), g_2(\mathbf{u}))^T = (2u_1 - 1, 2u_2 - 1)^T$ und $|J(\mathbf{g}(\mathbf{u}))| = 4$ erhalten wir

$$\int_0^1 \int_0^1 4 \cdot \exp(\sqrt[3]{2u_1 - 1} + \sqrt[3]{2u_2 - 1}) du_1 du_2$$

- Wir erhalten folgenden Graphen



- Durch die Graphik wird anschaulich, das folgende Unterteilung in Subregionen sinnvoll ist:

- $\Omega_1 = \{\mathbf{u} \mid u_1 \leq 0.5 \text{ und } u_2 \leq 0.5\}$
- $\Omega_2 = \{\mathbf{u} \mid u_1 > 0.5 \text{ und } u_2 \leq 0.5\}$ oder $\{\mathbf{u} \mid u_1 \leq 0.5 \text{ und } u_2 > 0.5\}$
- $\Omega_3 = \{\mathbf{u} \mid u_1 > 0.5 \text{ und } u_2 > 0.5\}$

da die Funktion in dem Quadranten rechts oben (also Ω_3) seine grössten Funktionswerte annimmt.

⁶ entnommen aus Holton (2003)

Eine gleichmässige Stichprobenziehung auf $\Omega (= \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$ würde dazu führen, dass viele Realisationen der Stichprobe in die Subregionen Ω_1 und Ω_2 fallen und dort nichts oder nur sehr wenig zur Schätzung des Mittelwertes der zu integrierenden Funktion beitragen.

- Die vorgeschaltete MC-Simulation erbringt uns folgende m_j 's: $m_1 = 38$, $m_2 = 272$, $m_3 = 690$
- Der Stratified Sampling-Schätzer hat also folgende Struktur:

$$\begin{aligned}
 H &= p_1 \frac{\sum_{k=1}^{m_1} f(U_1^{[k]})}{m_1} + p_2 \frac{\sum_{k=1}^{m_2} f(U_2^{[k]})}{m_2} + p_3 \frac{\sum_{k=1}^{m_3} f(U_3^{[k]})}{m_3} \\
 &= 0,25 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{38} f(U_1^{[k]})}{38} + 0,5 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{272} f(U_2^{[k]})}{272} + 0,25 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{690} f(U_3^{[k]})}{690} \\
 &= \\
 &0,25 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{38} 4 \exp(\sqrt[3]{U_{1,1} - 1} + \sqrt[3]{U_{1,2} - 1})}{38} + 0,5 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{272} 4 \exp(\sqrt[3]{U_{2,1} - 1} + \sqrt[3]{U_{2,2} - 1})}{272} + 0,25 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{690} 4 \exp(\sqrt[3]{U_{3,1} - 1} + \sqrt[3]{U_{3,2} - 1})}{690}
 \end{aligned}$$

2.3 Importance Sampling (IS)

Bisher haben wir nur gleichverteilte ZVEN betrachtet. Das kann aber zu folgenden Szenarien führen⁷:

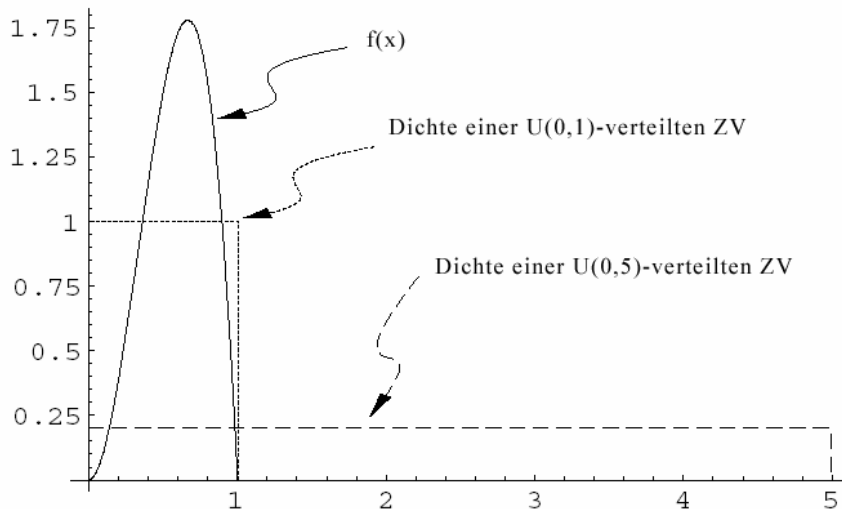


Abbildung 1

Betrachten wir das Szenario einer $U(0,1)$ -verteilten ZVEN V . Hier erhalten wir für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$

den Schätzer: $E[f(V)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(v_i)$.

Betrachten wir aber das Szenario der $U(0,5)$ -verteilten ZVEN W . Hier erhalten wir folgende Schätzung:

$\int_0^1 f(x)dx = 5 * E[f(W)] = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n f(w_i)$. Ein äußerst fragwürdiger Schätzer, da 80 % der w_i ($i = 1..n$)

nichts über das Integral aussagen, da $f(x) = 0$ für $1 < x < 5$. Wir sollten also zur Schätzung Verteilungen heranziehen, bei der vermehrt ZVEN von “wichtigen” Regionen der zu integrierenden Funktion realisiert werden.⁸

⁷ Beispiel entnommen aus Anderson (1999)

⁸ “Wichtige” Regionen einer Funktion f sind in diesem Kontext Regionen, in denen f besonders große Funktionswerte annimmt.

Betrachten wir das Problem, das Integral $\int_{x \in A} f(x) dx$ zu bestimmen. Sei $h(x)$ eine Dichtefunktion der ZVen x . Es gilt also $\int_{x \in A} h(x) dx = 1$. Dann haben wir: ($h(x) \neq 0, \forall x \in A$ wo $f(x) \neq 0$)

$$\int_{x \in A} f(x) dx = \int_{x \in A} f(x) \frac{h(x)}{h(x)} dx = \int_{x \in A} \frac{f(x)}{h(x)} h(x) dx = E_h \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right]$$

mit $E_h[\dots]$ als Erwartungswertoperator basierend auf der Verteilung h .

Dabei wird $\frac{f(x_i)}{h(x_i)}$ als Dichteindex (engl. *likelihood ratio*) bezeichnet.

Betrachten wir das rechte Integral, so können wir ableiten, das ein IS-Schätzer für unser Ausgangsproblem gewählt werden kann, wenn wir eine Stichprobe von $h(x)$ -verteilten ZVen X_i ziehen und die x_i mit dem Dichteindices multiplizieren. Das führt uns zum IS-Schätzer

$$f_n^h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{h(x_i)} \quad \text{wo } x_i \sim h(x).$$

Die Aufgabe besteht nun darin, eine “gute” Wahrscheinlichkeitsdichte h zu finden.

Anderson gibt wünschenswerte Eigenschaften für $h(x)$ an:

“In summary, a good importance sampling function $h(x)$ should have the following properties:

1. $h(x) > 0$, whenever $f(x) \neq 0$
2. $h(x)$ should be close to being proportional to $|f(x)|$
3. It should be easy to simulate values from $h(x)$
4. It should be easy to compute the density $h(x)$ for any value x that you might realize.”⁹

⁹ Anderson (1999)

3. Einsatz der MC-Simulation bei der VaR-Bestimmung

Nachdem wir nun den MC-Schätzer für den allgemeinen Fall hinreichend diskutiert haben, konzentrieren wir uns nun auf den Fall der VaR-Bestimmung mittels der MC-Simulation. Dabei werden wir das Quantil, welches unser Konfidenzniveau widerspiegelt, approximativ bestimmen.

Dazu schneiden wir unsere Rezeptur (2.1) auf diese Aufgabenstellung zu. Der Zufallsvariablenvektor $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_i)$ wo $\mathbf{U}_k = (u_k^{[1]}, u_k^{[2]}, \dots, u_k^{[m]})$ mit $1 \leq k \leq i$ und m wie oben, enthält jetzt unsere i Risikofaktoren, die in m verschiedenen Szenarien beobachtet werden. Das bedeutet also, das wir m -mal unser Portfolio neu bewerten müssen

Beispiel 3.1

Unser Portfolio besteht aus 50 Tonnen Aluminium und 100 Tonnen Blei. Eine Tonne Aluminium kostet USD 1.500, eine Tonne Blei USD 450. Der aktuelle Wert des Portfolios ist also $p^{akt} = \text{USD } 75.000 + \text{USD } 45.000 = \text{USD } 120.000$.

Die Kovarianzmatrix sei gegeben durch: $\Sigma = \begin{pmatrix} 4009 & 212 \\ 212 & 300 \end{pmatrix}$

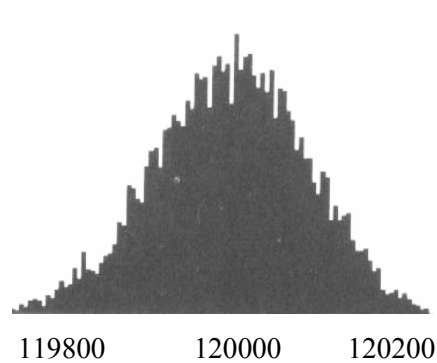
und der Mittelwert durch $\mu = p^{akt} = 120.000$

Berechne den morgigen 95% USD VaR-Wert!

Lösung:

- Wir realisieren eine gleichverteilte Stichprobe der Länge $m=1000$.
- Aus der so gewonnenen Realisierung $\{\mathbf{u}^{[1]}, \mathbf{u}^{[2]}, \dots, \mathbf{u}^{[m]}\} \sim U_m((0,1)^m)$, wo $\mathbf{u}^{[i]} = (u_1^{[i]}, u_2^{[i]})^T$ (siehe Spreadsheet), wird nun ein Vektor $\{\mathbf{x}^{[1]}, \mathbf{x}^{[2]}, \dots, \mathbf{x}^{[m]}\} \sim N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ errechnet, wo $\mathbf{x}^{[i]} = (x_1^{[i]}, x_2^{[i]})^T$ und \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellen.
- Aus dem $N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ -verteilten Zufallsvektor konstruieren wir nun mittels der Formel $\mathbf{y}^{[i]} = k * \mathbf{x}^{[i]} + \mu$ einen $N_m(\mu, \Sigma)$ -verteilten Zufallsvektor (k sei dabei die zu Σ gehörige Cholesky-Matrix)

- *Wir konstruieren einen neuen Zufallsvektor $Y = Y^{[1]} + Y^{[2]}$ mit seinen $m = 1000$ Realisationen $y = y^{[1]} + y^{[2]}$. So können wir nun die Stichprobenverteilung aufstellen und erhalten:*



- *Das .05-Quantil der Stichprobenverteilung ist 119.893. Diesen Wert nehmen wir als Approximation der wahren Portfolio-Verteilung und erhalten das .95-Quantil der Portfolio-Verteilung*

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(0,95) &= p^{akt} - \Phi^{-1}(0,05) \\ &= 120.000 - 119.893 \\ &= 107\end{aligned}$$

- *Der morgige 95% - USD VaR ist also USD 107.*

Bei Implementierung der in Kapitel 2 diskutierten Varianzreduktionsmethoden kommen wir dem “wahren” VaR näher, wobei wir den gewünschten Präzisionsgrad mit weniger Durchläufen (also kleinerem m) erreichen. Holton (2003) nimmt eine technische Analyse der Güte der Varianzreduktionsmethoden vor.

4. Einordnung der MC-Simulation

Um den VaR zu berechnen können wir uns drei verschiedener Methoden bedienen:

1. der parametrischen Methode,
2. der historischen Simulation, und der
3. Monte Carlo Simulation

Zwar sieht Duffie/Pan¹⁰ die Anwendung der Monte Carlo Simulation aufgrund ihrer Komplexität als einen “letzten Ausweg” (“*last resort*”) an, trotzdem muss sich aber die MC-Simulation keineswegs hinter den anderen zwei genannten Methoden verstecken.

Eine seiner Stärken liegt sicherlich in ihrer Anwendbarkeit bei sowohl linearen als auch nicht-linearen Derivativen.

“From an end-user perspective, the important point to remember is that if you have significant nonlinear exposures in your portfolio, a simulation approach with full position re-pricing will generally be more accurate than a parametric approximation for estimating VaR – however, at the cost of greater complexity.”¹¹

¹⁰ Duffie/Pan (1997)

¹¹ RiskMetric Group (1999)

Literaturverzeichnis

Anderson, Eric C. (1999), Vorlesung “Monte Carlo Methods and Importance Sampling”,
Lecture Notes for Stat 587C (Statistical Genetics)

Diethelm, Vorlesung “Numerische Methoden in der Finanzmathematik”, TU Carolo-
Wilhelmina zu Braunschweig, Prof. Dt. Kai Diethelm, Abteilung für Numerische
Mathematik

Duffie, Darrel and Pan, Jun (1997), *An overview of Value at Risk*, Journal of Derivatives
1997, p. 7 – 49

Glasserman, Paul, Heidelberger, Philip und Shahabuddin (2000), *Efficient Monte Carlo
Methods for Value-at-Risk*, In: *Mastering Risk*, Band 2, Financial Times – Prentice
Hall, auch unter: www.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/Other/masteringrisk.pdf

Holton (2003), *Value-at-Risk, Theory and Practice*, San Diego, California: Academic Press

RiskMetric Group (1999), *RISK MANAGEMENT: A Practical Guide*,
unter: www.riskmetrics.com/pracovv.html

Szechtman (2003), *Control Variates Techniques for Monte Carlo Simulation*. Proceedings
of the 2003 Winter Simulation Conference, Hrsg. S. Chick, P.J. Sánchez, D. Ferrin and
D.J. Morris.