

Quantilsschätzung als Werkzeug zur VaR-Berechnung

Ralf Lister, Aktuar, listler@actuarial-files.com

Zusammenfassung: Zwei Fälle werden betrachtet und die jeweiligen VaR-Werte errechnet. Im ersten Fall wird angenommen, dass die Gewinne (Returns), die ein Portfolio abwirft, normalverteilt sind. Dann gehen wir davon aus, dass die Gewinne eines Portfolios lognormalverteilt sind.

Keywords: Value-At-Risk, Normalverteilung, Lognormalverteilung, Quantil

1. Einführung

Value-at-Risk (VaR) misst den größtmöglich zu erwartenden Schaden unter normalen Marktbedingungen in einem bestimmten Zeitintervall zu einem vorher festgelegten Vertrauensniveau. Der Wert "VaR" beantwortet also die Frage nach dem größtmöglich zu erwartenden Schaden, der mit einer Wahrscheinlichkeit von x ($0 \leq x \leq 1$, oder einfacher: x %) in dem gewählten Zeitintervall eintreten kann. Somit wird mit VaR das Risiko eines Portfolios in einer einzigen Zahl ausgedrückt.

Hat ein Portfolio-Manager also einen täglichen VaR von 1 Million Euro bei einem Vertrauensniveau von 99 % errechnet, so bedeutet dies, dass er einmal in 100 Tagen einen Schaden von mehr als 1 Million Euro unter normalen Marktbedingungen zu erwarten hat.

Für ein unternehmensweites Risiko-Management-Modell wird gemeinhin der Prozentsatz des angenommenen Risikos als 5 % gewählt. Es ist also das Problem

$$\int_{-\infty}^{VaR} f_{P/L}(l) dl = 0.05$$

nach VaR aufzulösen, wobei $f_{P/L}(\cdot)$ die Profit-/Loss-Funktion beschreibt.

2. Ein einfaches Beispiel

Ein Portfolio-Manager managt ein Portfolio \mathbf{P} mit genau einem Vermögenswert X . Das Portfolio \mathbf{P} hat einen aktuellen Marktwert (also zum Zeitpunkt $t = 0$) von 100 Millionen Euro. Der Return des Portfolios sei normalverteilt und sei im jährlichen Mittel 10 %. Das Portfolio weist eine jährliche Standardabweichung von 30 % auf.

Der Manager interessiert sich nun für die Werte, die \mathbf{P} zu einem zukünftigen Zeitpunkt (z.B. am folgenden Tag) annehmen kann. Dieser zukünftige Zeitpunkt sei durch $t = 1$ charakterisiert. Somit haben wir den Zeithorizont von $(0,1)$ für unser Beispiel.

Unser Portfolio \mathbf{P} hat also folgende Verteilung:

$$(\text{Werte von } \mathbf{P}) \sim \mathcal{N}(110;900)$$

(NV steht für "Normalverteilung").

Wir wollen nun die Frage beantworten, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass \mathbf{P} am Ende des Jahres nur noch einen Wert von 80 Millionen Euro hat.

Dazu definieren wir eine Zufallsvariable (i.f.: ZV) ${}^{1|0}\mathbf{P}$, die Werte unseres Portfolios annehmen kann. (${}^{1|0}\mathbf{P}$ ist also nichts anderes als eine Funktion

$${}^{1|0}\mathbf{P} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr({}^{1|0}\mathbf{P} \leq 80) \tag{2.1}$$

Wir legen fest: $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Dann gilt:

$$\Pr({}^1|_0\mathbf{P} \leq 80) = \Pr(30Z + 110 \leq 80) \quad [2.2]$$

$$= \Pr(Z \leq (80-110) / 30) \quad [2.3]$$

$$= \Pr(Z \leq -1) \quad [2.4]$$

$$= \Phi_Z(-1) \quad [2.5]$$

$$= 0,1587 \quad [2.6]$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV ${}^1|_0\mathbf{P}$ am Ende des Jahres nur noch einen Wert von 80 Millionen Euro aufweist, ist also ungefähr 15,9 %.

Nun fragen wir uns, welchen Verlust wir mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Prozent machen können. Wir suchen also das ,01-Quantil $\Phi^{-1}_{1|_0\mathbf{P}}(0,01)$ der ZV ${}^1|_0\mathbf{P}$.

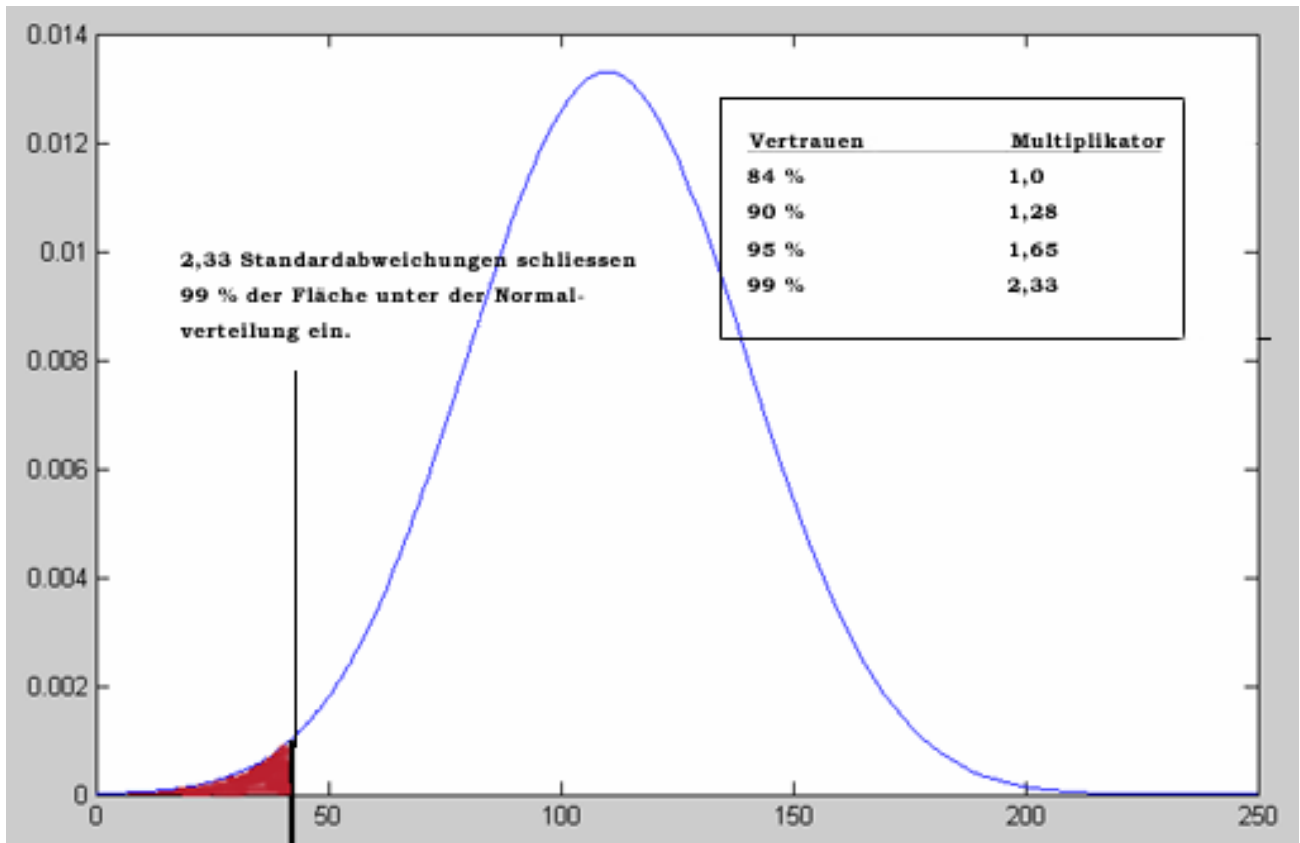
Wir rechnen also:

$$\Phi^{-1}_{1|_0\mathbf{P}}(0,01) = 110 - 2,33 * 30 \quad [2.7]$$

$$= 40,1 \quad [2.8]$$

Mit der Wahrscheinlichkeit von 1 % hat am Ende des Jahres die ZV unseres Portfolios ${}^1|_0\mathbf{P}$ nur noch einen Wert von 40,1 Millionen Euro. Das heißt, der VaR hat in diesem Falle einen Wert von $100 - 40,1 = 59,9$ Millionen Euro.

Abbildung 1: Normalverteilung



Hier können wir sehen, dass 1 % der Fläche unter der Dichtefunktion $\Phi_{1|0P}$ links von der Markierung liegt (schattiert). Interpretation: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % liegt der Wert von ${}^{1|0}P$ unter dem markierten Wert.

3. Die Lognormalverteilung

Oft ist eine Annahme der Art, dass der Log-Return normalverteilt ist, während die zugehörigen Preise lognormal sind, realitätsnäher als die Annahme, die Preise seien normalverteilt¹. Wir ändern also unsere Ausgangssituation [2.1] ab zu

$$\Pr({}^1I^0 \mathbf{P} \leq 80), {}^1I^0 \mathbf{P} \sim \mathcal{LN}(m; s^2), \quad [3.1]$$

wobei

$$m = \ln\left(\frac{\mu^2}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}}\right)$$

$$s = \sqrt{\ln\left(\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]^2 + 1\right)}.$$

Wir haben $\mu = 110$ und $\sigma^2 = 900$ und erhalten somit

$$m = 4,66, s = 0,26$$

Die Rechnung analog zu [2.2] bis [2.6] lautet nun

$$\Pr({}^1I^0 \mathbf{P} \leq 80) = \Pr(\ln({}^1I^0 \mathbf{P}) \leq \ln(80)) \quad [3.2]$$

$$= \Pr(0,26Z + 4,66 \leq \ln(80)) \quad [3.3]$$

$$= \Pr(Z \leq ((\ln(80) - 4,66) / 0,26)) \quad [3.4]$$

$$= \Phi_Z(-1,07) \quad [3.5]$$

$$= 0,1432. \quad [3.6]$$

¹ Eine lognormalverteilte ZV kann z.B. keine negativen Werte annehmen. Es gilt: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \exp(X) \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$

Für das ,01-Quantil $\Phi_{1|0P}^{-1}(0,01)$ gilt nun:

$$\begin{aligned} \Phi_Z^{-1}(-2,33) &= 0,01 \\ \Rightarrow \Pr(Z \leq -2,33) &= 0,01 \end{aligned} \quad [3.7]$$

$$\Rightarrow \Pr([\ln({}^1|_0\mathbf{P}) - m] / s \leq -2,33) = 0,01 \quad [3.8]$$

$$\Rightarrow \Pr([\ln({}^1|_0\mathbf{P}) - 4,66] / 0,26 \leq -2,33) = 0,01 \quad [3.9]$$

$$\Rightarrow \Pr(\ln({}^1|_0\mathbf{P}) \leq 4,66 - 2,33(0,26)) = 0,01 \quad [3.10]$$

$$\Rightarrow \Pr({}^1|_0\mathbf{P} \leq 1,4) = 0,01 \quad [3.11]$$

Daraus folgern wir:

$$\begin{aligned} \Phi_{1P}^{-1}(0,01) &= 110 - 1,4 * 30 \\ &= 68. \end{aligned}$$

Die Annahme, daß ${}^1|_0\mathbf{P}$ lognormalverteilt ist, bringt uns nun folgende Ergebnisse: Mit

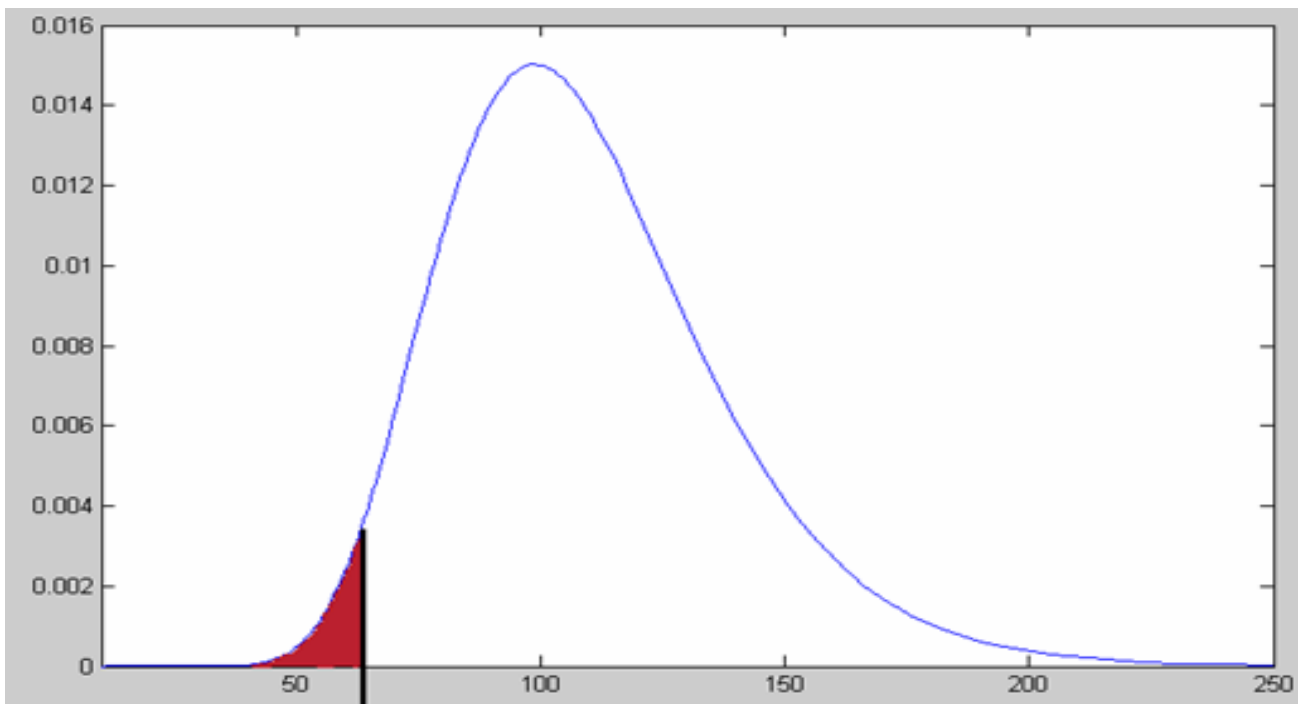
Wahrscheinlichkeit 14,3 % hat das Portfolio \mathbf{P} am Jahresende nur noch einen Wert von 80 Millionen

Euro. Und mit der Wahrscheinlichkeit von 1 % hat \mathbf{P} am Jahresende nur noch einen Wert von 68

Millionen Euro. VaR hat also in diesem Szenario einen Wert von $100 - 68 = 32$ Millionen Euro.

Wieder können wir diese Ergebnisse an der Graphik der Lognormalverteilung interpretieren:

Abbildung 2: Lognormalverteilung



Links von der Markierung liegen wieder die Portfoliowerte, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % und weniger auftreten können.