

Estimación mediante cuantiles como herramienta para el cálculo del VaR

Ralf Lister, Actuario Matemático, lister@actuarial-files.com

Resumen: Observamos dos casos y hacemos el cálculo correspondiente para llegar al VaR. Primero, suponemos que los retornos de un portafolio son distribuidos normalmente. Segundo, cambiamos nuestro supuesto y asumimos que los retornos de un portafolio son lognormal.

Palabras Claves: Value-At-Risk, distribución normal, distribución lognormal, cuantiles

1. Introducción

El valor al Riesgo, o VaR (en inglés, Value at Risk), mide la pérdida máxima de una cartera, en un periodo dado, con una fiabilidad dada. El “VaR” nos dice cual puede ser la pérdida máxima la cual puede ocasionarse bajo una probabilidad x (o, mas intuitivo: x %) en un periodo dado (por ejemplo, a un día vista). VaR expresa el riesgo de un portafolio en un solo número.

Si el VaR por un día es de un millón de Euros, nos indica que, con fiabilidad de 99 %, una vez en 100 días perderemos más de un millón de Euros.

En la mayoría de los casos una compañía selecciona como porcentaje del riesgo 5 % significando que el gerente de riesgo tiene que resolver el problema

$$\int_{-\infty}^{VaR} f_L(l) dl = 0.05$$

donde f_L es la función de la pérdida (*loss function*).

2. Un ejemplo sencillo

Un gerente maneja una cartera P con exactamente un valor X . Actualmente P tiene el valor de 100 millones de Euros. Los retornos de P son distribuido normal. En promedio P tiene retornos anuales de 10 % y una desviación típica anual de 30 %.

Ahora el gerente quiere saber los valores los cuales el portafolio puede obtener al final del horizonte del tiempo.

Sabemos que el portafolio “actúa” de la siguiente manera:

$$(\text{Valores de } P) \sim \mathcal{N}(110;900)$$

(NV significa “distribución normal”).

Ahora queremos encontrar la probabilidad con cual P tiene un valor de 80 millones de Euros al final del horizonte del tiempo.

Por eso definimos una variable aleatoria (en lo siguiente: v.a.) ${}^{1|0}P$ la misma puede llevar valores de nuestro portafolio. Buscamos

$$\Pr({}^{1|0}P \leq 80), {}^{1|0}P \sim \mathcal{N}(110 ;900) \quad [2.1]$$

Establecemos: $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Tenemos lo siguiente:

$$\Pr({}^{1|0}P \leq 80) = \Pr(30Z + 110 \leq 80) \quad [2.2]$$

$$= \Pr(Z \leq (80-110) / 30) \quad [2.3]$$

$$= \Pr(Z \leq -1) \quad [2.4]$$

$$= \Phi_Z(-1) \quad [2.5]$$

$$= 0,1587 \quad [2.6]$$

La probabilidad (P tiene un valor de 80 millones de Dólares al final del horizonte del tiempo) es aproximadamente 15,9 %.

Estimación mediante cuantiles como herramienta para el cálculo del VaR

Ahora preguntamos cual perdida podemos sufrir con una probabilidad de un por ciento.

Por eso buscamos el ,01-quantil $\Phi^{-1}(,01)$ de la v.a. ${}^1|_0 P$.

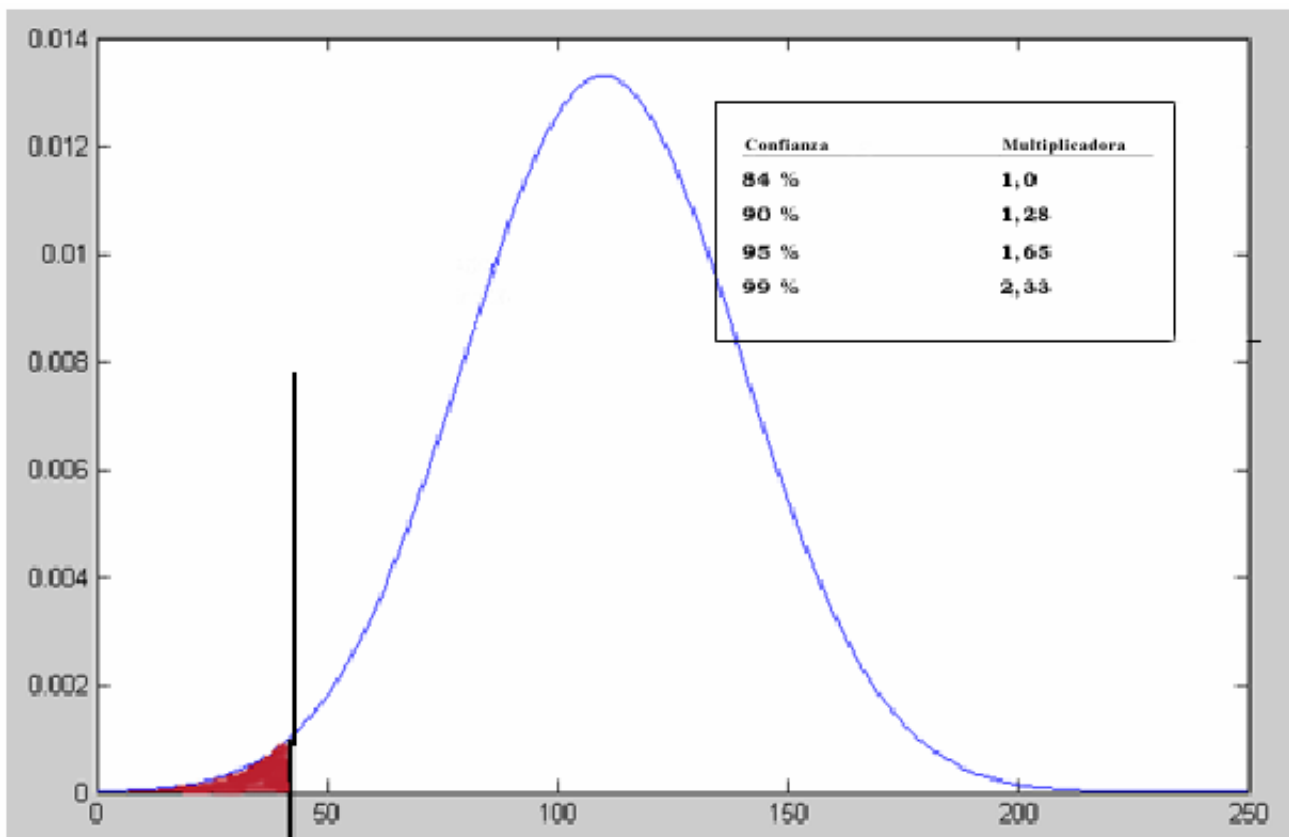
Calculamos:

$$\Phi^{-1}(,01) = 110 - 2,33 * 30 \quad [2.7]$$

$$= 40,1 \quad [2.8]$$

Con la probabilidad de 1 % la cartera P tiene al final del horizonte del tiempo un valor de 40,1 de millones de Euros, diciendo que el VaR tiene un valor de $(100 - 40,1 =) 59,9$ millones de Euros.

Figura 1: Función de densidad de $N(110;900)$



En la Figura 1 podemos ver que 1 % de la área bajo de la densidad se encuentra a la izquierda de la ficha (la zona marcada oscura). Concluimos: Con una probabilidad de 1 % encontramos la pérdida a la izquierda de la ficha.

3. La distribución lognormal

Frecuentemente es mas conveniente usar la distribución lognormal para modelar retornos. Cambiamos nuestro punto de partida [2.1]:

$$\Pr({}^1|{}^0\mathbf{P} \leq 80), {}^1|{}^0\mathbf{P} \sim \mathcal{LGN}(m; s^2), \quad [3.1]$$

donde

$$m = \ln\left(\frac{\mu^2}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}}\right)$$
$$s = \sqrt{\ln\left(\left[\frac{\sigma}{\mu}\right]^2 + 1\right)}.$$

Con $\mu = 110$ y $\sigma^2 = 900$ obtenemos

$$m = 4,66, s = 0,26$$

El calculo análogo desde [2.2] hasta [2.6] ahora es

$$\Pr({}^1 1^0 \mathbf{P} \leq 80) = \Pr(\ln({}^1 1^0 \mathbf{P}) \leq \ln(80)) \quad [3.2]$$

$$= \Pr(0,26Z + 4,66 \leq \ln(80)) \quad [3.3]$$

$$= \Pr(Z \leq ((\ln(80) - 4,66) / 0,26)) \quad [3.4]$$

$$= \Phi_Z(-1,07) \quad [3.5]$$

$$= 0,1432. \quad [3.6]$$

Para el ,01-quantil $\Phi^{-1}(,01)$ calculamos:

$$\Phi_Z^{-1}(-2,33) = 0,01$$

$$\Rightarrow \Pr(Z \leq -2,33) = 0,01 \quad [3.7]$$

$$\Rightarrow \Pr([\ln({}^1 1^0 \mathbf{P}) - m] / s \leq -2,33) = 0,01 \quad [3.8]$$

$$\Rightarrow \Pr([\ln({}^1 1^0 \mathbf{P}) - 4,66] / 0,26 \leq -2,33) = 0,01 \quad [3.9]$$

$$\Rightarrow \Pr(\ln({}^1 1^0 \mathbf{P}) \leq 4,66 - 2,33(0,26)) = 0,01 \quad [3.10]$$

$$\Rightarrow \Pr({}^1 1^0 \mathbf{P} \leq 1,4) = 0,01 \quad [3.11]$$

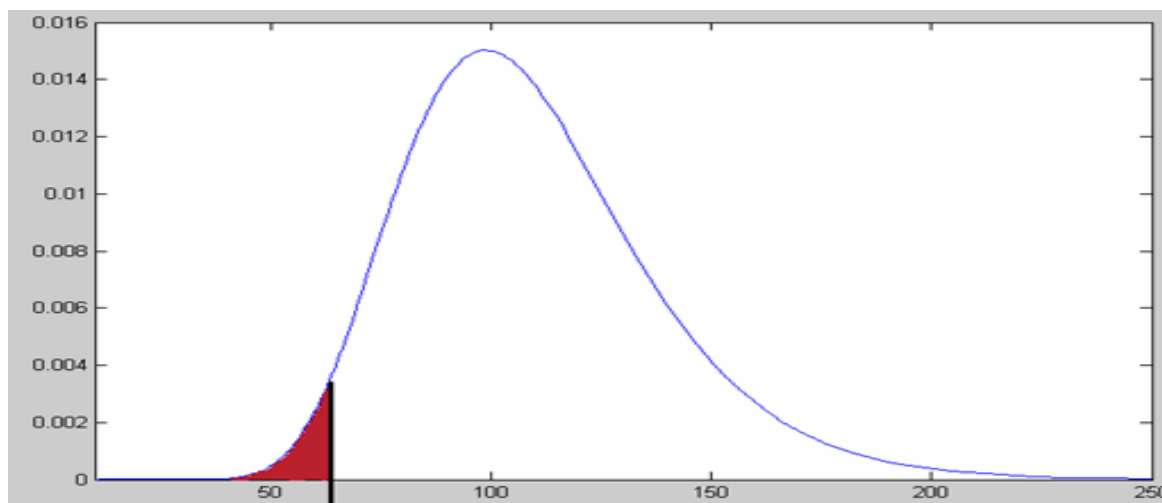
Concluimos:

$$\Phi_P^{-1}(0,01) = 110 - 1,4 * 30$$

$$= 68.$$

La suposición la cual ${}^1 1^0 \mathbf{P}$ tiene una distribución lognormal lleva a los resultados siguientes: Con la probabilidad de 14,3 % la cartera P al final del horizonte del tiempo tiene un valor de 80 millones de Euros. Y con la probabilidad de 1 % la cartera P tiene un valor de 68 millones de Euros. El VaR, deducimos, tiene un valor de $(100 - 68) = 32$ millones de Euros. Otra vez podemos interpretar estos resultados observando la función de densidad lognormal:

Figura 2: Función de densidad lognormal $\mathcal{LN}(4,66 ; 0,0676)$



A la izquierda de la ficha se encuentran los valores de la cartera las mismas pueden ocurrir con una probabilidad de un por ciento o menos.